

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $6 - 3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2} = 5^x + 24$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , în care $AC = 3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de 30° , respectiv 60° .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $A(z) = aI_3 + bB$, unde $z = a + ib$, cu a și b numere reale și $i^2 = -1$.
- 5p** a) Arătați că $\det B = i$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = nI_3$.
2. Pe $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^{x+y} - 2^{x+1} - 2^{y+1} + 6)$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = \log_2((2^x - 2)(2^y - 2) + 2)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Arătați că $x * x * x < 3x$, pentru orice $x \in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left| \frac{f(x)}{e^{-x}} - 1 \right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x-1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = 10$.
- 5p b) Demonstrați că $F(\sqrt{7}) < F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f .
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că $\int_3^5 f(x) dx = m(4 \ln 2 - 1)$.