

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianța 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2-i)^2 + i(4+i) = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(m) = 2m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 10$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 4 \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax - y + 2az = 0 \\ x - 2y + az = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = -1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4(x+y)^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = -3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{5} - \ln(x^2 + x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 9x}{5(x^2 + x + 5)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^3 + 8}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = 8$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_1^4 x f(x) dx = 4 \ln 2$.
- 5p** | **c)** Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)$.