

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii AC , iar punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{CB}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** c) Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln(e^x + x^2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 3}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) \sqrt{x + 3} dx = 12$.

5p b) Arătați că $\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{\pi}{2}$.