

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2(1-2i) + i(4+i) = 1$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3, -3)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 8) = \log_2(8 - 2x)$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 3)$ și $B(4, 0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB = 5$, $C = \frac{\pi}{4}$ și înălțimea $AD = 4$. Arătați că $BC = 7$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = A(a) - A(b) + I_3$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1) \cdot X \cdot A(0) = I_3$.
2. Pe mulțimea $M = [3, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = m(x-3)(y-3) + 3$, unde $m \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $3 \circ 5 = 3$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Pentru $m = 2$, arătați că $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: M \rightarrow M$, $f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$. Pentru $m = 1$, arătați că $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{e^{-x}}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)^2 + xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 f(x)(x^2 + 1)^2 dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{xf(x)} dx$. Arătați că

$$I_n - I_{n+4} = \frac{2}{(n+2)(n+4)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$