

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(3 + \lg \frac{1}{10}\right) \cdot \lg \sqrt{10} = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $(f \circ f)(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1} \cdot 8^x = 32$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- 5p 6. Se consideră expresia $E(x) = \operatorname{tg} x - 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -1 & 0 & 0 \\ x & 0 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $\det(A(x) \cdot A(x) - I_3) \leq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Se consideră matricea $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot (A(0))^{-1} = B \cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x^2 + y^2 + x + y}{x + y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 2 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m * n = 5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+6)\sqrt{x^2+4}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^4 e^x f(x) dx = 12$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2e-3}{e}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{f(x^n)} dx$. Demonstrați că

$$\frac{\ln 2}{n} \leq I_n \leq \frac{e-1}{n}, \text{ pentru orice număr natural } n, n \geq 2.$$