

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $N = \log_2 24 - \log_2 12 + 3$ este pătratul unui număr natural.
- 5p** 2. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = x - 2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1!, 2!, 3!, \dots, 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC . Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{FD}$, are loc relația $2(\overline{EB} + \overline{FC}) = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 5p** 6. Arătați că $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(-1)) = 3$.
- 5p** b) Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1) \cdot X \cdot A(1) = A(2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = xy - \sqrt{2}(x + y - 1) + 2$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{2} \circ 0 = \sqrt{2}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(x - \sqrt{2}) \circ (x + \sqrt{2}) = x$.
- 5p** c) Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1)\right)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numărul natural nenul n , știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(n, f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{5}x + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3}$ și funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f .

5p a) Arătați că $\int_1^e x^2 \left(f(x) + \frac{2 \ln x}{x^3} \right) dx = 1$.

5p b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x \cdot f(x^2 + 3) dx = -\frac{5 \ln 2}{128}$.

5p c) Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x \cdot F(x) dx = \frac{a^2 - 1}{2}$.