

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+4)=\log_4(6x-4)$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC=6$ și $\operatorname{tg} C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -3a & 3a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2))=5$.
- 5p** b) Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul întreg m pentru care $A(m) \cdot A(2m)=A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 4$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 3 = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 3x$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $x \circ a = x + a$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x-2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+4x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x+4}(x^2+2x-2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right) dx = \frac{15}{4}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
- 5p** c) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.