

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $5 - 2\sqrt{6}$, 1 și $5 + \sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f \circ f)(1) = 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = 32$.
- 5p** 4. Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, 1)$ și $B(2, 5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p** 6. Arătați că $(\operatorname{ctg} x + 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = 2\operatorname{ctg} 2x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + (a+1)z = a \\ x + ay - z = 4 \\ 2x - ay + 4z = -4 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -9$.
- 5p** b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) , atunci $x_0 + y_0 + z_0 = 2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 6$, arătați că $f(-1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X^2 + 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) - x \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - x \ln x) dx = 7$.

- 5p** **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3} dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.
- 5p** **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria strict mai mare decât 1.