

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică *M<sub>șt-nat</sub>***

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $2(1+i) - i(2-i) = 1$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 10$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(2a, a)$  aparține graficului funcției  $f$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$ .
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 5p** 5. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$  și  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , cu măsura unghiului  $B$  egală cu  $\frac{\pi}{6}$  și  $BC = 24$ . Bisectoarea unghiului  $C$  al triunghiului  $ABC$  intersectează latura  $AB$  în punctul  $D$ . Determinați lungimea segmentului  $CD$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 3$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(0) \cdot A(x) = A(0)$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$ , unde  $(A(1))^{-1}$  este inversa matricei  $A(1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 2 = 8$ .
- 5p** b) Arătați că  $e = 0$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ , pentru orice  $x, y \in (1, +\infty)$  cu  $x < y$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$ .

- 5p** b) Arătați că  $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$ .
- 5p** c) Se consideră funcția  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$ . Arătați că orice primitivă  $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $g$  este concavă.