

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2 - 5i + i(5 - 3i) = 5$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(2) = 15$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x+1} = 7^x \cdot 7^2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin una dintre cifre egală cu 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(4,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului OB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 5$ și $BC = 5\sqrt{5}$. Arătați că $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & x-3 \\ 3-x & x-4 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x + y)(4 - x - y)$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 3 = 3$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * 1 = 0$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care numărul $N = (n + 5) * (n - 5)$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2 \ln(x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $x^2 - x \geq 2 \ln \frac{x+1}{2}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = 12$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \frac{1}{4}$.
- 5p** c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x) - x^2 - 1}{e^x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este egală cu $3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$.