

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_2 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 5$ și $a_3 = 35$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{3x - 6}$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $3n^2 < 100$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(2, 5)$ și C , astfel încât B este mijlocul segmentului AC . Determinați coordonatele punctului C .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = AC$ și aria egală cu 18. Arătați că $BC = 6\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 3x \\ -x & 1+4x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Arătați că $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{1}{4}(x+1)(y+1) - 1$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 5 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m \leq n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1 + \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = 3$.
- 5p c) Demonstrați că $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$, pentru orice $x \in (0, 1]$ și orice $y \in [1, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = 4$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

- 5p** c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, în jurul axei Ox este egal cu $\pi \ln(4e)$.